



University of the Pacific Scholarly Commons

Euler Archive - All Works

Euler Archive

1751

De motu corporum super plano horizontali aspero

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>



Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De motu corporum super plano horizontali aspero" (1751). *Euler Archive - All Works*. 161.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/161>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

DE MOTV CORPORVM SVPER PLANO HORIZONTALI ASPERO.

AVCTORE

L. Euler.

§. 1.

Tab. v. **I**n omni corpore duplicem inesse posse motum, alterum progressiū alterum rotatorium tam experientia quam ipsa rei natura luculenter euincit, omnisque motus quem quidem corpus suscipere potest, vel est progressiū tantum, vel rotatoriū tantum, vel ex utroque mixtus. Hinc vnius cuiusque corporis motum distincte cognoscit is, qui tam quantitatem vtriusque motus, qui in illo corpore inest, quam rationem determinationis perfecte assignare valet. Loquor hic autem de corporibus solidis seu rigidis, quae nullius motus intestini, quo partes corporis situm inter se mutuum mutant, sunt capaces, vel saltem de talibus corporibus mihi fermo est, in quibus eiusmodi motus intestinus vel actu non datur vel non spectatur. Quodsi enim corpora vel fluida, vel mollia, vel flexibilia proponantur, tum ad eorum motum distincte intelligendum vnius cuiusque partis motum cognosci oportet, donec perueniatur ad partes tam minutas, in quibus motus intestinus amplius omnino non est. Hocque pacto omnis motus cognitio perducitur ad duo illa motus in corpora solida cadentis genera, quae initio commemoravi.

§. 2. In quolibet vero corpore motus progressiū tantum inesse dicitur, si omnes corporis partes aequali

ve

velocitatis gradu secundum eandem directionem quouis temporis puncto ferantur. In istum motum duplex cadit mutatio cum ratione celeritatis, tum ratione directionis; et quamdiu celeritas non mutatur, motus vocatur aequabilis seu vniformis; quamdiu autem directio manet eadem, motus est rectilineus, quo singulae corporis partes in lineis rectis progrediuntur. Sin autem tam celeritas quam directio iugiter immutetur, nascitur motus inaequabilis curuilineus. Atque ex his perspicitur natura motus aequabilis in directum facti, quippe in quo tam celeritas quam directio manet eadem. Huiusmodi motum respicit prima lex Mechanicae, qua motus huiusmodi aequabilis et in directum tendens ex ipsa corporum natura perpetuo inuariatus conseruari statuitur ita vt vi huius legis nulla mutatio tam in celeritate quam in directione euenire queat, nisi quae a causis externis proficiscatur.

§. 3. Praecipuum autem ad quod hic attendi conuenit, est quod ista haec prima mechanicae lex ad omnis generis corpora siue solida siue fluida ac situs partium mutui mutationem patientia aequae pateat. Si enim corpus fluidum motum habeat progressuum vniformiter in directum tendentem, tum eius singulae particulae aequalibus celeritatibus in directionibus inter se parallelis progrediuntur, atque vnaquaeque particula istum motum propter vim insitam inertiae perpetuo inuariatum conseruare annititur. Neque vero reliquae corporis particulae ambientes isti conseruationi status aduersabuntur, cum ipsae aequali velocitate et in eadem directione vel praecedant vel sequantur vel vtrinque ad latera incedant.

E c 3

Hoc-

Hocque modo fit, vt quaelibet particula in suo statu perseverare queat, salvo omnium reliquarum particularum statu; sicque ob perseverantiam cuiusque particulae in statu suo, simul totum corpus in statu suo permanebit, atque adeo figuram suam, quoniam omnes partes eundem inter se situm mutuam retinent, inuariatam conseruabit, id quod euenire non posset, si omnes particulae neque aequali celeritate, neque secundum eandem directionem incederent.

§. 4. Motus rotatorius est, quo corpus circa axem aliquem fixum siue per ipsum corpus transeuntem siue extra corpus situm conuertitur. In hoc igitur motu quaelibet corporis particula in plano ad illum axem normali ita mouebitur, vt circa eum arcum circularem describat. Cum itaque totum corpus circa hunc axem simul conuertatur, celeritas cuiusque particulae erit distantiae ipsius ab axe proportionalis, directio vero posita erit in plano ad axem normali, eritque perpendicularis ad radium ex ipsa particula ad axem normaliter ductum. Ex cognita ergo celeritate vnus corporis particulae per regulam auream inuenitur celeritas reliquarum omnium particularum. Quod autem ad directionem attinet, ea duobus tantum modis determinatur, cum corpori circa datum axem gylando duae solum viae pateant vel dextrorsum nempe vel sinistrorsum. Data ergo positione axis directio motus duplici tantum modo est possibilis vel in dextram plagam vel in sinistram, quarum altera alteri e diametro est opposita.

§. 5. Manente ergo positione axis eadem in motu rotatorio alia mutatio euenire non potest, nisi ratione celeritatis, eo quod directio in sui contrariam subito mutari

tari nequit. At vero axis pluribus mutationibus est obnoxius, nisi in eodem situ fixo retineatur. Primum enim motu progressivo quocunque moveri potest, ac deinde etiam ipse motu rotatorio ferri potest, ex quo motus corporis summopere perturbatus enasci videtur. Interim tamen eiusmodi motus quantumvis complicatus semper resolui potest in motum progressivum, et motum rotatorium circa quempiam axem fixum, saltem pro temporis intervallo minimo: fieri enim utique potest ut alio tempore rotatio circa alium axem absolatur. Ista autem resolutio pluribus modis institui potest, licet enim in eiusmodi motu concipere motum progressivum quemcunque, ac praeterea motum circa quempiam axem fixum, qui duo motus illum ipsum motum, qui in corpore actu inest, repraesentent. Quare cum haec resolutio innumeris modis pro arbitrio institui queat, diligenter cavendum est, ne resolutionem praeter rationem instituamus, sed ita, ut verus motus non solum facilius percipi, sed etiam ad normam legum mechanicae tractari atque examinari queat.

§. 6. Ponamus igitur quo penitus naturam motus rotatorii introspeciamus, corpus aliquod circa axem quemcunque, cui firmiter sit alligatum, gyrari: atque manifestum est singulas corporis partes, quia in lineis non rectis sed circularibus mouentur, vi sua propria in hoc motu permanere non posse; sed dum conantur in directum progredi, vim exercere ab axe recedendi, in quo vis centrifuga consistit. Hamobrem necesse est, ut singulae corporis partes tanta vi cum axe sint connexae, ut vis centrifuga istud vinculum superare non valeat;

si ergo partes corporis sint dissolutae, singulas quasi opè fili satis fortis ad axem alligatas esse oportet, sin autem corpus fuerit solidum, ita vt eius partes inter se omnes firmiter sint connexae, tum sufficit vt totum corpus vnico filo cum axe sit connexum, quod omnibus viribus, quibus singulae eius partes ab axe recedere conantur, aequiualeat. His igitur filis motus partium circularis conseruabitur, celeritas autem nullo modo afficitur. Ex quo per primam mechanicae legem sequitur, in eiusmodi motu rotatorio celeritatem, qua corpus rotatur, perpetuo eandem conseruari debere, neque in celeritate mutationem vllam oriri posse nisi a causâ externa.

§. 7. Si igitur corpus solidum, cuius partes firmiter inter se cohaerent, axi cuiuspiam fixo fuerit alligatum, hocque corpus circa istum axim a causâ quacunque impetrauerit motum rotatorium; tum vi propria inertiae hunc motum rotatorium perpetuo eadem cum celeritate conseruabit, nisi a viribus externis eius celeritas vel augeatur vel diminuatur. Interea vero corpus ob vim centrifugam ex motu omnium partium curuilineo resultantem vim exeret in axem, eumque vel promouere vel inclinare conabitur, hancobrem axem tanta vi in situ suo detineri oportet, vt promotioni seu inclinationi satis resistere valeat. Pendet ista vis, quam axis sustinet, partim ab eius positione respectu corporis partim ab ipsâ corporis celeritate, hincque vel multo maior vel multo minor fieri potest. Fit autem calculo docente minima haec vis, si axis per centrum grauitatis corporis transeat, in quo situ si vllam vim sentit, ea non ad promouendum sed tantum ad inclinandum axem tendit. Fieri autem adeo potest,

vt

vt haec vis inclinans, si axis per centrum grauitatis corporis transit, prorsus euanescat, hocque casu nulla vi opus erit ad axem in situ suo detinendum, sed etiam si non sit fixus, suo sponte in eodem perpetuo situ perseverabit.

§. 8. Apparet ergo quid requiratur, vt corpus solidum circa axem quempiam, qui nulla vi in situ suo detineatur, libere gyron queat. Primum scilicet necesse est, vt axis ille per centrum grauitatis corporis transeat: deinde etiam insuper opus est: vt vires inclinantes, quae ex viribus centrifugis partium corporis oriuntur, se mutuo prorsus destruant. Quodsi ergo corpus circa talem axem conceperit motum rotatorium, tum hunc motum eadem velocitate perpetuo conseruabit, neque vlla opus erit vi externa quae axem rotationis in situ suo retineat. Sic globus ex materia homogenea confectus circa quemvis axem per centrum grauitatis transeuntem libere gyra- bitur, quia ob perfectam vndique similitudinem nulla vis extat, quae axem inclinare conetur. Axem hac proprietate praeditum vocabo axem permanentem, atque huiusmodi axium inuestigatio plerumque est maxime difficilis: primum casum notasse sufficiat, quo axis per centrum grauitatis ductus simul per singularum corporis sectionum ad axem normalium centra grauitatis transit: tum enim ea gaudebit proprietate, quae ad axem permanentem requiritur.

§. 9. Corpus igitur, quod circa huiusmodi axem permanentem semel adeptum est motum rotatorium, hunc ipsum motum perpetuo conseruabit vniuniformem, neque yllam patietur siue in celeritate siue in positione

axis alterationem, si quidem a nulla vi externa sollicitetur. Interea vero axis iste, circa quem fit rotatio in perfecta quiete perseverabit, ob vires centrifugas partium corporis se inuicem penitus destruentes. Corpus igitur per vim inertiae duplicem motum constanter in se suscipere ac perpetuo retinere valet, alterum progressivum aequabilem in directum, atque alterum rotatorium circa axem per centrum gravitatis transeuntem ac permanentem. Intelligitur autem corpus non solum seorsim utrumque motum recipere posse, verum etiam coniunctim, ex quo sequitur haec lex mechanicae maximi momenti: *Omne corpus, cuius partes cunctae firmiter inter se cohaerent, praeter motum progressivum aequabilem in directum etiam motum rotatorium circa axem permanentem in se suscipere, et constanter conservare valet.* Eiusmodi motus ergo erit mixtus ex progressivo et rotatorio, axisque motus rotatorii motu sibi parallelo uniformiter in directum promouebitur.

§. 10. Quemadmodum hoc casu vterque motus tam progressivus quam rotatorius seorsim, sese in statu uniformitatis conservat, ita etiam vterque seorsim potest considerari ac mensurari, perinde ac si alter omnino abesset. Sic ad motum progressivum dimetiendum animum a rotatorio abducere licet, quasi prorsus non adesset, atque tum celeritas atque directio vnius corporis puncti declarabit totum corporis motum. Ad hoc autem convenit motum centri gravitatis maxime spectari, eo quod eius motus progressivus a motu rotatorio penitus non afficitur; quare cognita centri gravitatis tam celeritate, quam directione motus progressivus perfecte innotescit.

Si

Simili modo motum rotatorium cognoscemus abstrahendo mentem a motu progressiuo, seu quod eodem redit fingendo motum progressiuo contrarium atque aequalem, quo pacto solus motus rotatorius supererit, qui cognoscetur ex celeritate, qua punctum corporis dato intervallo ab axe distans circa axem rotatur, adiaci tantum debet, in vtram duarum illarum plagarum, in quas motus rotatorius aequae fieri potest, actu corpus rotationem absoluat.

§. II. His expositis quae ad statum corporum, in quo vi propria perseverare possunt, pertinent, videndum est breviter, quemadmodum tam motus progressiuus quam rotatorius a viribus sollicitantibus afficiatur atque immutetur. Quod primum quidem ad motum progressiuum attinet effectus, quem vires quaecunque sollicitantes exerunt cognoscetur, si primo totum corpus in centro gravitatis concipiatur concentratum, ut instar puncti spectari queat, ac deinde omnes vires sollicitantes in directionibus sibi parallelis in centrum gravitatis mente transferantur. Tum enim hae vires translatae in corpus in centro gravitatis collectum eundem exerent effectum ratione motus progressivi, qui proinde ex primis mechanicae principiis colligi poterit. Effectus scilicet vel in celeritatis vel directionis vel vtriusque simul mutatione consistet. Scilicet si omnes vires resoluantur in tangentiales et normales ad directionem motus, atque summa tangentium ponatur = T. summa normalium = N. Tum vero massa corporis sit = M. eiusque celeritas debita altitudini v . ac tempusculo minimo spatium d absoluat^{ur}: erit uti constat $d v = \pm \frac{T d s}{M}$ atque radius osculi

F f 2

lin.

lineae curuae, ad quam describendam corpus cogitur erit

$$= \frac{2 M v}{N}.$$

§. 12. Ad motus rotatorii autem mutationem a viribus sollicitantibus prouenientem cognoscendam, momentum inertiae corporis respectu axis rotationis cognitum esse debet, quod est summa omnium productorum, quae oriuntur si singula corporis elementa multiplicentur respectiue per quadrata distantiarum suarum ab axe rotationis, momentum ergo inertiae hoc erit productum ex massa corporis M in quadratum cuiuspiam lineae rectae quae sit $= b$ ita vt momentum inertiae futurum sit $= M b^2$. Deinde virium sollicitantium momentum, tendens ad corpus circa axem rotationis conuertendum quaeri oportet, quod erit productum ex vi P in lineam quandam k seu erit $= P k$. Tum si fuerit puncti corporis ab axe rotationis distantis intervallo $= c$ celeritas debita altitudini u fiet $du = + \frac{P k c d q}{M b b}$, dum hoc punctum motu suo arcum $d q$ radio c circa axem absoluit. Si vires sollicitantes tendant ad axem rotationis ipsum mutandum, isque non firmiter in situ suo detineatur, tum utique axis rotationis inclinabitur, qua autem lege hoc fiat, etiamnum non est definitum.

§. 13. His legibus motus ad praesens institutum necessariis praemissis pergo ad motum corporum super plano horizontali aspero factum tam progressiuium quam rotatorium considerandum, quem in hac dissertatione ex primis principiis eruere constitui. Ac primo quidem perspicuum est grauitatem ad motum neque accelerandum nec retardandum quicquam conferre; quoniam enim eius directio ad planum horizontale normalis est, tota in ap-
 pref

pressionem corporis contra planum consumetur. Ob hunc ipsum autem effectum grauitas in hoc negotio maxime spectari debet; cum ex eo quantitas frictionis determinetur, a qua, quemadmodum motus corporum super plano horizontali turbetur inuestigaturus sum. Plura autem sunt impedimenta, quibus motus corporum super plano horizontali retardatur; namque praeter frictionem, quae ab asperitate superficiei horizontalis oritur, hirsutia superficiei ideo quoque motum diminuit, quod corpus filamenta, quibus planum est oblitum, deprimere cogitur, id quod sine motus diminutione fieri nequit. Praeterea vero resistentia aeris motui corporis non parum obest, tam propter inertiam, ex qua resistentia quadrato celeritatis proportionalis resultat, quam propter tenacitatem, qua aeris particulae inter se cohaerent, unde resistentia gignitur constans seu momentis temporum proportionalis.

§. 14. Quo igitur facilius retardationem motus, quae ab his impedimentis tam singulis seorsim consideratis quam omnibus coniunctis producit, primum mentem ab omnibus abstrahemus, ut intelligamus, cuiusmodi motus corporis esse debeat, si neque scabrities neque hirsutia plani, neque etiam resistentia aeris vllum obstatulum motui obiciat. Concipiamus itaque planum horizontale perfectissime politum, atque spatium ab aëre prorsus vacuum. Sic igitur dubium erit nullum, quin corpus motum progressuum, quem semel est adeptum perpetuo eundem sit conseruaturum, ac motu aequabili in directum sine vlla retardatione progressurum. Sin autem corpus habuerit motum rotatorium circa axem per centrum grauitatis transeuntem ac permanentem, tum

etiam in eodem loco haerens perpetuo eadem velocitate gyrabitur nisi forte recta verticalis per centrum gravitatis ducta extra contactum corporis cum plano cadat, quo casu utique gravitas peculiarem effectum ederet, eiusmodi autem statum hic remouemus. Simili modo si corpus nactum fuerit duplicem motum, alterum progressivum, alterum rotatorium circa axem permanentem, etiam utrumque motum vniiformiter in aeternum sine vlla alteratione conservabit.

§. 15. Contemplemur iam planum horizontale asperum quod per frictionem resistat motui corporum super eo incedentium. Sit igitur ADB corpus quodcumque huic plano impositum, cuius centrum gravitatis sit in G , ex quo perpendicularis in planum demissa GC cadat intra basin corporis AB , qua planum contingit. Hoc ergo corpus in isto situ siue frictio adsit siue minus perpetuo persistet, nisi ipsi motus imprimatur. Quodsi autem ipsi motus progressivus in directione horizontali GF imprimatur, hunc motum continuare non poterit nisi planum radendo basi sua AB : ex quo, dum plani inaequalitatem superat, frictionem patietur, qua eius motus paulatim imminuetur, donec tandem corpus ad quietem reducatur. Dum autem aequalia spatia percurrento aequalia obstacula offendit, perinde eius motus retardabitur, ac si vi quadam constante retro vrgeretur. Erit ergo frictio potentia constans a corporis celeritate non pendens, quae corpus, quamdiu mouetur, quasi retrahit, eiusque motum retardat, in ipsa autem quiete, ubi omnis rarus cessat, simul frictionis effectus evanescit. Hoc igitur differt vis frictionis a reliquis viribus constantibus cuiusmo-

di

di est grauitas, quod corpora in motu solum posita afficiat, motusque directioni perpetuo sit contraria; in quiete vero omnem vim amittat.

§. 16. Manifestum autem est, dum frictio in ipso corporis ac plani contactu mutuo AB gignitur eius directionem quoque in hoc loco esse positam; quare cum eius directio sit motus directioni GF contraria, frictio est vis, qua corpus continuo, dum mouetur, in directione CO retrahitur. Loco frictionis igitur substitui licet potentiam constantem basi AB corporis applicatam, atque in directione CO directioni motus GF contraria trahentem; hæcque vis in locum frictionis substituenda, quamdiu corpus mouetur aequaliter motum retardare ponenda est, quacunque celeritate corpus moueatur; simulac vero corpus ad quietem fuerit redactum, tum quasi per saltum omnis eius vis subito annihilari censenda est. Primum autem omnium intelligitur, quoniam frictionis directio non per corporis centrum grauitatis G transit, non solum a frictione motum corporis progressuum retardari debere, verum etiam ex frictionis vi momentum enasci, quod tendet ad motum rotatorium corpori circa axem horizontalem per centrum grauitatis ductum normalem ad directionem motus GF in ducendum, in sensum DHAC, vel quod eodem redit ad corpus circa A prosternendum. Hæcque adeo prostratio actû eueniet, nisi magnitudo basis sit impedimento.

§. 17. Cum igitur frictio sit vis motum retardare valens, ea cum vi grauitatis comparari, atque adeo per pondus mensurari poterit. Per experimentum autem pro quouis casu pondus assignari potest, quod frictioni æquiualeat

leat. Ad hoc explorandum corpori ADB super plano quiescenti in basi A alligetur filum quod in directione horizontali AV tendatur dato pondere, quod ope trochleae in V firmatae commodissime fieri potest. Quo iam corpus ADB ab hoc pondere protrahatur, necesse est ut pondus vim frictionis superet; hincque manifestum est, quamdiu pondus minus sit frictione, corpus in quiete esse permanens. Quamobrem filum AV a minimo pondusculo incipiendo continuo maioribus tendatur, donec corpus moveri incipiat; quod eveniet, quam primum pondus quo filum AV tenditur tantillum frictionem superabit. Hoc ergo pacto satis exacte pondus determinari poterit frictioni aequale, quo cognito effectus frictionis ad calculum reuocari poterit. Sit igitur F pondus frictioni aequivalens, atque corpus ADB dum super plano OV motu radente incedit, continuo retro trahetur vi $= F$, quae corpori in ipsa basi applicata concipienda est. Simili porro modo frictio cuiuscunque alius corporis per experimenta explorari potest; expedit autem ad hoc filum AV in corporis loco infimo applicari, uti monui, quam in sublimiori, ut per hanc vim simul conatus frictionis corpus subvertendi destruat.

§. 18. Quod ad quantitatem frictionis F attinet, ea primum ab asperitate cum plani OV tum basis corporis AB plurimum pendet, ita ut, quo asperius fuerit vel alterutrum vel utrumque, eo maior euadat frictio: hoc autem a priori commode mensurare non licet. Deinde frictio potissimum appressioni corporis ad planum respondet, ita ut quo maior fuerit pressio corporis in planum, in eadem ratione frictio augeatur. Apprimitur autem corpus ad planum vi proprii ponderis, quo deorsum nititur
in

in directione GC ; quare , si corporis pondus vel minuat^{ur} vel augeatur manente eadem basi , eademque plani asperitate , tum frictio in eadem ratione vel minuetur , vel augebitur. Hincque explorata per experimenta vnius corporis frictione super dato plano per solum ratiocinium infinitorum aliorum corporum frictiones colligi poterunt. Denique videatur magnitudo basis non parum ad frictionem siue augendam siue minuendam conferre : interim tamen experimenta nullum sensibile discrimen a magnitudine basis oriundum demonstrant. Quodsi autem perpendamus pressionem corporis per totam basin distribui , facile percipimus singula basis elementa eo minus planum premere , quo maior fuerit basis , ideoque eo minorem frictionem sustinere ; ex quo sequitur , magnitudinem basis quantitatem frictionis prorsus non afficere debere.

§. 19. His de frictionis mensura expositis , facile foret retardationem motus progressiui , qui corpori ADB initio fuit impressus , pro quouis momento assignare , si modo constaret , corpus a frictione non prostratum iri. Quamobrem ante nobis definiendum est , quibus casibus corpus motum progressiuum impressum vsque ad quietem conseruare queat , quibusque casibus frictio corpus circa A subuertere valeat ; hoc enim casu motus resultaret perquam irregularis. Ponamus ergo frictionem sufficere ad corpus prosternendum , atque corpus iam procliue esse ad lapsum : hoc igitur casu corpus in sola extremitate A plano innitetur , cum reliqua basis pars iam incipiat eleuari , et circa A conuerti. In hoc igitur statu corpus totam pressionem in solo puncto A exeret , et quia pressio aequalis est ponderi corporis , quod ponamus = P ,

Tom. XIII.

G g

pla-

planum a corpore in puncto A deorsum premetur vi $\equiv P$. Cum autem planum sit immobile, per reactionem corpus tantandem vi $\equiv P$ sursum vrgebit, ita ut corpus actu sollicitetur in directione verticali sursum AE vi $\equiv P$; atque per hanc vim firmitas plani ex computo extrudatur, quoniam ea aequae ac planum impedit, quominus corpus infra lineam horizontalem OV descendat.

§. 20. Hic ergo reductus est praefens corporis status, ut plano praeter frictionem omnino sublato corpus ADB a tribus sollicitetur viribus, primum nempe propter gravitatem a vi P in directione DC; deinde iterum vi $\equiv p$ in directione AE, ac tertio propter frictionem a vi $\equiv F$ in directione CO. Videamus igitur an ab his viribus generari queat motus rotatorius circa centrum gravitatis G seu potius circa axem horizontalem eo transeuntem et normalem ad motus directionem GF, in sensum DHAB. Ac primo quidem vis $GC \equiv P$ nihil confert ad motum rotatorium, quia eius directio per centrum gravitatis G transit; altera vero vis $AE \equiv P$ huic motui rotatorio in sensum DHAB reluctatur, eandem scilicet reluctantiā exerceret firmitas plani OV, cuius loco vim illam P substituimus; momentum vero huius vis P ad motum rotatorium impediendum est $\equiv P \cdot GE \equiv P \cdot AC$. Frictio igitur sola F in directione CO agens conabitur eiusmodi motum rotatorium corpori inducere, eiusque momentum pro hoc effectu erit $\equiv F \cdot GC$. Momentum igitur actuale ad motum rotatorium gignendum erit $\equiv F \cdot GC - P \cdot AC$.

§. 21. Nisi igitur hoc momentum $F \cdot GC < P \cdot AC$ affirmativum habeat valorem hoc est nisi $\frac{F}{P} > \frac{AC}{GC}$, motus rotatorius a frictione non producet, sed corpus so-

lo motu progressiuo mouebitur, donec ad quietem reducatur. Ponamus scilicet corpus initio, vbi perpendicularum GC in O inciderat, motum progressiuum nactum esse celeritate debita altitudini $=a$, nunc vero absoluto spatio $OC=x$, celeritatem eius residuam esse debitam altitudini v . Cum iam inter vires corpus sollicitantes nulla praeter frictionem F motum progressiuum afficiat, haecque motum retardet, erit $dv = -\frac{F dx}{P}$, denotante P massam simulque pondus corporis, ex quo fiet $v = a - \frac{F x}{P}$. Hanc obrem corpus ad quietem redigetur absoluto spatio $x = \frac{a P}{F}$. Hic igitur erit motus corporis pro casu, quo $\frac{F}{P} < \frac{AC}{GC}$, atque vt corpus, postquam nactum est motum progressiuum, non procumbat, necesse est, vt frictio F ad pondus P minorem habeat rationem, quam AC ad GC. Plerumque autem super plano ligneo est $\frac{F}{P} = \frac{1}{3}$, his itaque casibus requiritur, vt sit $\frac{AC}{GC} > \frac{1}{3}$, seu angulus AGC $> 18^\circ 26'$. Quae proprietas quibus in corporibus locum habeat, ex positione centri grauitatis et basi corporis facile intelligi potest.

§. 22. Ex his intelligitur nullum corpus, in quo fit $\frac{AC}{GC} > \frac{F}{P}$, motu progressiuo solo super plano OV incedere posse, sed eiusmodi corpora simulac ipsis motus imprimitur, procumbere, motumque rotatorium cum progressiuo permiscere. Quo propius ergo perpendicularum GC ex centro grauitatis corporis in planum horizontale demissum ad extremitatem basis A cadit eo magis procliue erit corpus ad prolabendum, hicque conatus prolabendi eo fiet maior, quo altius centrum grauitatis G fuerit situm. Hinc si corpus fuerit prisma ex materia homogenea confectum AabB, cuius altitudo Aa sit $=A$,

G g 2
et

Fig. 2.

et diamter basis $AB = B$ erit perpendicularum $GC = \frac{1}{2}A$ et interuallum $AC = \frac{1}{2}B$. Hoc igitur corpus motu progressiuo super plano OV incedere nequit, si fuerit $\frac{B}{A} < \frac{F}{P}$ hoc est si diameter basis ad altitudinem minorem habeat rationem, quam frictio F ad pondus prismatis P . Quod si ergo frictio F aequalis fuerit tertiae parti ponderis P , tum nullum prisma cuius altitudo plus quam triplo maior est diametro basis AB motu progressiuo super plano incedere potest. Similique modo pyramis vel conus, cuius altitudo ad diametrum basis maiorem habet rationem quam 9 ad 2 super plano moueri non poterit, quin statim procumbat.

§. 23. Videamus iam quomodo corpora prismatica, quae horizontaliter super plano iacent, sint comparata ratione motus cum progressiuo tum rotatorio. Sumamus autem bases huiusmodi prismatum esse figuras polygonas regulares, atque eiusmodi prisma in directione ad axem normali ad motum impelli. Sit numerus laterum polygoni basin constituentis $= n$, eritque angulus $AGC = \frac{180^\circ}{n}$; atque $\frac{AC}{GC} = \text{tang. } \frac{180^\circ}{n}$ posito sinu toto $= 1$. Quod si ergo fuerit $\text{tang. } \frac{180^\circ}{n} > \frac{F}{P}$, tum eiusmodi corpus prismaticum motu progressiuo super plano OV propelli poterit; sin autem sit $\text{tang. } \frac{180^\circ}{n} < \frac{F}{P}$, tum statim, ac impellitur, procidet, simulque voluendo se mouebitur. Si igitur frictio F aequalis fuerit ponderi P , tum prismata triangularia sola sine prolapsu progredientur, quae autem bases habent quadratas indifferentia erunt ad lapsum, quorum bases autem sint plurium laterum, ea simul voluendo promouebuntur. Si $\frac{F}{P} = \frac{1}{2}$, tum prismata, quorum bases plura habent latera, quam 6, motum rotatorium recipient, et si $\frac{F}{P} = \frac{1}{3}$, tum ea tantum prismata

ta voluentur, quorum bases plura quam 9 habent latera. Sin porro $\frac{F}{P} = \frac{1}{2}$, tum ea prismata sine prouolutione moueri non poterunt, in quibus laterum numerus maior est quam 12.

§. 24. Quoniam igitur nouimus, quibus casibus corpus, cui tantum motus progressiuus imprimitur, ob frictionem simul motum volutorium recipere debeat, investigemus, quo pacto iste motus rotatorius generetur et continuetur. Vidimus autem tam ex frictione quam ex reactione plani prodire momentum ad motum rotatorium circa axem per centrum grauitatis ductum producendum $= F.GC - P.AC$. Si iam ponamus corporis momentum inertiae respectu huius axis esse $= P.b.b$, erit vis, qua motus angularis circa centrum grauitatis actu producit $= \frac{F.GC - P.AC}{P.b.b}$. Ad motum igitur angularem definiendum, abstrahamus cogitationes ab motu progressiuo, concipiamusque centrum grauitatis corporis G in quiete, Fig. 3. atque corpus circa G ita rotari incipiet, vt punctum A radio AG moueatur per arcum $A\alpha$, perueniet igitur punctum A infra horizontalem OV , etiamsi loco firmitatis plani vim illam P sursum vrgentem substituerimus. Hic igitur motus propter planum impenetrabile isto modo perfici non poterit, neque vnquam admitti potest motus, quo vlla corporis pars infra OV perducatur.

§. 25. Punctum igitur A motu rotatorio circa centrum grauitatis G infra planum OV demergi non potest, nisi planum liberrime cedat. Ponamus igitur planum cedere atque punctum A vtrique in α descendet; statim autem tribuamus plano vim sese in pristinum statum restituendi, hincque punctum α sursum pellitur vi quapiam per spatium $\alpha\beta$,

G g 3

atque

atque hoc eodem tempore eueniat necesse est, quo arcum $A\alpha$ absoluit; hoc enim modo ab hac vi statim in principio motus rotatorii agente punctum A perpetuo in recta OV conseruabitur. Sit vis ista plani $=p$ ita ut punctum A seu α sursum vrgeatur vi $=p$: hac igitur vi totum corpus sursum sollicitabitur vi acceleratrice $=\frac{p}{P}$. Per hanc vero eandem vim p motus rotatorius diminuetur, eritque momentum non amplius $FGC-P.AC$ sed $F.GC-(P+p)AC$, quod diuisum per momentum inertiae corporis respectu axis, circa quem fit rotatio, quod momentum inertiae fit $=Pbb$ dat vim acceleratricem motus rotatorii $\frac{F.GC-(P+p)AC}{Pbb}$, haec vero ducta in AG dat vim acceleratricem puncti A per arcum $A\alpha$. Cum igitur spatia simul descripta sint viribus acceleratricibus proportionalia erit $\alpha\beta : A\alpha = \frac{p}{P} : \frac{F.GC-(P+p)AC}{Pbb}$
 $AG=AC:AG$.

§. 26. Ex hac analogia adipiscimur hanc aequationem $pbb=AC(F.GC-P.AC)-p.AC^2$. quae praebet vim, qua totum corpus eleuatur, ad id, ut in rotatione extremitas corporis A non infra horizontalem OV descendat, nempe fit haec vis $p = \frac{AC(F.GC-P.AC)}{bb+AC^2}$. Atque ista vis non solum initio motus rotatorii locum obtinet, sed etiam pro quolibet momento, dum motus rotatorius durat, est enim ista expressio durante motu rotatorio variabilis, cum propter perpendiculari GC tum interualli AC variabilitatem. Augetur autem primo momento perpendicularum GC elemento $\alpha\beta$, interuallum vero AC diminuitur elemento $A\beta$. Quoniam igitur initio motus rotatorii est $F.GC > P.AC$, multo magis durante

te motu manebit $F.GC > P.AC$, ideoque vis p affirmatiuum obtinet valorem, quamdiu interuallum AC versus O cadit; tamdiu enim centrum grauitatis G eleuari debet, donec recta GA fiat verticalis; hoc autem casu ob $AC=0$, etiam vis p euanescit. Deinceps vero, quando recta GA versus V inclinabitur, ob AC negatiuum, vis p negatiuum induet valorem, eaque centrum grauitatis G rursus deprimetur, donec alia corporis facies sese plano OV applicet, vicemque basis sustineat quodcum euenerit videndum est, vtrum super noua basi motus rotatorius de nouo generetur an secus.

§. 27. Ob istam autem vim p , quae requiritur ad centrum grauitatis corporis G cum eleuandum tum rursus deprimendum, vis rotatoria corporis diminuetur. Est enim vis acceleratrix, qua extremitas A circa G circum agitur non amplius $= \frac{F.GC - P.AC}{Pbb} . AG$, sed $= \frac{F.GC - (P+p)AC}{Pbb} . AG$, quae propter $p = \frac{AC(F.GC - P.AC)}{bb + AC^2}$ abit in $\frac{AC(F.GC - P.AC)}{P(bb + AC^2)}$. Quanquam igitur ob vim p ad corpus eleuandum requisitam vis rotatoria diminuitur, tamen corpus motum rotatorium recipiet, dummodo fit $F.GC - P.AC > 0$. ex quo, non obstante motus rotatorii difficultate ob lineae AG obliquitatem, tamen idem criterium, quod supra inuenimus, nempe si $F.GC > P.AC$ locum retinet ex quo intelligi queat, vtrum motus rotatorius subsequatur an secus. Durante autem motu rotatorio punctum A versus O super plano OV incedet, celeritate, quae se habeat ad suam celeritatem gyratoriam, vti $A\beta$ ad $A\alpha$ hoc est vti GC ad AC ; hic autem tantum primum generationis momentum, quo motus rotatorius producitur

con-

consideramus, ita ut sit motus rotatorius infinite parvus respectu motus progressivi: ex quo punctum A planum eadem celeritate radet, ac si nullus adhuc adesset motus rotatorius.

§. 28. Ex his tamen intelligitur, motum corporum ex progressivo et rotatorio mixtum admodum fore irregularem, ideoque determinatu difficilem. Motus enim rotatorius primum conceptus tam diu tantum durabit, quoad alia corporis facies sese plano OV applicet, id quodcum percussione fiet, hocque casu motus continuatio etiam ex percussione regulis definiri debet. Hoc igitur cum euenerit motus rotatorius, si quidem subsistet, subito immutabitur, dum corpus alio angulo in planum innititur, neque ad hunc nouum motum rotatorium determinandum sufficiet uti in primo ad criterium ante datum solum respexisse, sed etiam ad motum rotatorium ante iam conceptum attendi oportet, quatenus per eum corpus incitatur ad nouum motum rotatorium recipiendum. Haecque cautela toties est repetenda, quoties alia basis plano applicatur, ubi semper quasi per saltum in motu mutatio subitanea producit. Tametsi autem motus rotatorius sine respectu ad progressuum habito calculo subiici potest, tamen perpetuo simul ad motum progressuum respici oportet, ut pateat quamdiu basis, qua corpus plano innititur in directione AV progrediatur et quanta celeritate planum radat, si enim ista basis quiescat, tum frictio omnino cessat, si autem antecedentia versus incedat, tum subito frictio fit negativa, motumque progressuum accelerabit.

§ 29. Ob haec igitur obstacula eiusmodi tantum corpora examini subiiciemus, quorum motus super plano

OV

O V sine saltibus secundum vnam certam continuitatis legem abfolui queat, ac de reliquis corporibus fufficiat annotaffe, vti est factum, quibus casibus motus progressius sine prouolutione fieri possit. Inter huiusmodi autem corpora primum omnium deprehenditur globus, cuius centrum grauitatis in ipso globi centro versatur, globus enim talis motu continuo sine saltu super plano O V rotando progredi potest. Deinde etiam ad hanc classem pertinent cylindri, qui centrum grauitatis in medio axis sui puncto situm habeant, si secundum directionem ad axem normalem moueantur. Praeterea huc referri possunt omnia corpora rotunda, quae vtrunque circa sectionem per centrum grauitatis factam et ad axem normalem ex partibus aequalibus et similibus constant, cuiusmodi corpora formantur ex conuersione figurae planae diametro orthogonalī praeditae circa ordinatam diametro normalem. Eiusmodi enim corpus rotundum super plano O V positum, et motum in directione horizontali ad suum axem normalem tam progrediendo quam rotando sine subitaneo saltu moueri poterit. Id tantum est tenendum, vt axis corporis ad quem omnes sectiones normaliter factae sunt circuli simul per omnium sectionum centra grauitatis transeat, quo proprietate axis permanentis sit praeditus.

§. 30. Incumbat igitur eiusmodi corpus rotundum plano O V ita vt eius axis sit horizontalis, atque repraesentet circulus D H C eius sectionem mediam, in cuius centro G positum erit totius corporis centrum grauitatis, eius axis autem erit recta horizontalis per G transiens atque ad planum sectionis D H C normalis. Tanget igitur hoc corpus planum subiectum O V vel in vnico pun-

cto C si reliquae eius sectiones omnes axi normales minores fuerint sectione DHC, vel in pluribus punctis, si plures sectiones maximae fuerint aequales vel contactus erit linea recta, si corpus fuerit cylindrus. Perpetuo autem perpendicularum GC quod in planum OV demittitur simul in rectam per omnia contactus puncta transeuntem erit normalis, haecque recta plano DHC simul normaliter insistet. Sit iam totius corporis pondus $= P$, eiusque frictio, dum motu progressiuo in directione horizontali GF ad axem corporis normali mouetur $= F$. Atque ob rationes supra allegatas habebit F ad P constantem rationem pro omnibus corporibus ex materia aeque laevi confectis, si quidem eadem maneat plani OV asperitas.

§. 31. Cum igitur in his corporibus basis, qua plano insistent secundum directionem motus OV non sit extensa, interallum CA omnino euanescit, eritque momentum virium sollicitantium ad motum rotatorium generandum $= F.GC$: quod cum semper affirmatum habeat valorem, dummodo frictio F non prorsus sit nulla, apparet eiusmodi corpora motum progressiuum recipere non posse, quin simul in ipsis statim motus rotatorius generetur. Quare si corpori impressus fuerit motus progressiuus in directione GF a frictione statim generabitur motus rotatorius circa axem corporis in plagam DHC, qui ob vim rotatoriam perpetuo eandem, quamdiu scilicet frictio adest, continuo accelerabitur, donec vis rotatoria F.GC euanescat. Frictio autem tamdiu aliquem retinebit valorem, quamdiu corpus motu suo planum radet, hocque euenit, quamdiu puncti C celeritas rotatoria

ria circa axem minor est, quam celeritas motus progressiui. Quam primum autem inter hos duos motus aequalitas intercedit, tum frictio subito cessabit, motusque tam progressiuus, quam rotatorius manebit vniformis, nisi quatenus a resistentia aëris ac villositate plani diminuitur.

§. 32. Datur scilicet super plano aspero non obstante frictione motus vniformis mixtus ex progressiuo et rotatorio, quo cum corpus perpetuo sine vlla diminutione progredietur, si quidem nec resistentia aeris nec plani villositas impedimentum afferat. Existit autem iste motus vniformis tum cum frictio F penitus cessat, id quod euenit, quam primum punctum C planum radere desinit, provenit enim frictio a motu basis, qua corpus planum tangit, super plano OV . Quodsi ergo ponamus celeritatem motus progressiui in directione $GF = Vv$ seu debitam altitudinē v , tum nisi motus rotatorius adesset singula corporis puncta, ideoque etiam punctum C eadem celeritate Vv in directione CV moueretur. Sin autem ponamus motum rotatorium solum adesse, quo punctum C circa axem moueatur celeritate $= Vu$ in plagam DHC , tum punctum C dum planum tangit mouebitur in directione CO celeritate $= Vu$. Quare si vterque motus tum progressiuus quam rotatorius simul insit in corpore, tum puncti C celeritas in directione CV erit $= Vv - Vu$: ex quo si fiat $Vu = Vv$, motus puncti C super plano penitus cessabit, simulque frictio euanesceat. Corpus ergo, postquam hunc motum fuerit adeptum, perpetuo aequabiliter progredi perget.

§. 33. Quoniam autem ad motum rotatorium definiendum nosse oportet momentum inertiae corporis re-

H h 2

spectu

Fig. 5. spectu axis rotationis, pro quo hactenus scripsimus Pbb , conueniet pro corporibus saltem rotundis, qualia hic tractare statuimus, istud momentum inertiae calculo inuestigare. Sit igitur figura ACB , quae circa axem AB rotata praebeat solidum rotundum, cuius motum sumus exploraturi; atque sit medietas figurae BGC perfecte aequalis ac similis alteri medietati AGC . Ponamus autem solidum ex materia vniiformi constare, quo calculus facilius euadat; cadet ergo vtiq; centrum grauitatis corporis geniti sponte in G . Ducatur ad axem applicata quaecunque PM ipsique proxima pm ; ac vocetur $GP = x$; $PM = y$ erit $Pp = dx$. Sumatur in elemento $PMmp$ particula Xx , quae posito $PX = z$ erit $= dx dz$. Ab hac particula per rotationem generabitur annulus, cuius massa erit $= \pi z dz dx$ denotante $1:\pi$ rationem radii ad peripheriam: et cum huius annuli singulae partes aequaliter ab axe distent, erit eius momentum inertiae $= \pi z^3 dz dx$, integretur vtraque formula, fiatque $z = y$; dabit $\frac{\pi y y dx}{2}$ massam elementi solidi ex elemento plano Pm orti, et $\frac{\pi y^4 dx}{4}$ eius momentum inertiae. Hinc cum pars CGB similis sit parti CGA erit volumen seu pondus corporis $P = \pi \int y y x$; et momentum inertiae $Pbb = \frac{\pi}{2} \int y^4 dx$; ex quo fit $bb = \frac{\int y^4 dx}{2 \int y y dx}$ posito post integrationem $x = GA$.

§. 34. Ponamus primo corpus esse cylindrum ex materia homogenea confectum, erit vbique $y = CG = c$, hincque $bb = \frac{\int c^4 dx}{2 \int c c dx} = \frac{c^2}{2}$; ita vt momentum inertiae Pbb futurum sit $= P \cdot \frac{c^2}{2} = \frac{1}{2} P \cdot CG^2$. Sit porro corpus nostrum rotundum globus homogeneus cuius radius $CG = c$,

$= c$, fiet $yy = cc - xx$, et $\int yy dx = ccx - \frac{1}{3} x^3$ et $\int y^4 dx = c^4 x - \frac{2}{3} ccx^3 + \frac{1}{5} x^5$. Ponatur $x = c$; fietque pro toto globo $\int yy dx = \frac{2}{3} c^3$ et $\int y^4 dx = \frac{8}{15} c^5$, ex quibus sequitur $hb = \frac{2}{3} cc$, ideoque momentum inertiae $Pbh = \frac{2}{3} Pcc = \frac{2}{3} P.CG^2$. Simili modo si corpus fuerit sphaeroides ellipticum, ex conuersione semiellipsidis ACB circa axem AB genitum, ponatur semiaxis $AG = a$, et $CG = c$, erit $yy = cc - \frac{c^2 x^2}{a^2}$; et $y^4 = c^4 - \frac{2c^4 x^2}{a^2} + \frac{c^4 x^4}{a^4}$: vnde fit $\int yy dx = ccx - \frac{c^3 x^3}{3a^2}$, et $\int y^4 dx = c^4 x - \frac{2c^4 x^3}{3a^2} + \frac{c^4 x^5}{5a^4}$. Ponatur $x = AG = a$, fiet $\int yy dx = \frac{2}{3} acc$ et $\int y^4 dx = \frac{8}{15} ac^4$, ex quo sequitur $hb = \frac{2}{3} cc$, prorsus vti pro globo. Erit ergo pro omni sphaeroide elliptico homogeneo, quantiscunque fuerit axis AB , perpetuo momentum inertiae respectu axis $AB = \frac{2}{3} Pcc = \frac{2}{3} P.CG^2$.

§. 35 Ponamus iam eiusmodi solidó rotundo in initio dum eius centrum grauitatis puncto O imminebat, impressum esse motum progressiuium in directione ad axem normali cum celeritate debita altitudini a simul vero, vt casum in latissimo sensu accipiamus, eidem corpori impressus sit motus rotatorijs in plagam DHC , quo singulae peripheriae DHC puncta M circa axem circumferantur celeritate debita altitudini b . Hoc duplici motu impresso corpus iam confecerit spatium $OC = x$, fitque nunc celeritas progressiua, qua centrum grauitatis G in directione horizontali GF progreditur, debita altitudini v , celeritas vero, qua punctum M etiamnum circa axem rotatur, debita altitudini u : vtrumque scilicet motum seorsim consideramus ac metimur, perinde ac si alter non

H h 3

adesset

Fig. 6.

adeffet. Progrediatur iam puncto temporis corpus motu progressiuo per spatium $Gg = dx$, atque interea punctum M motu angulari feretur per arcum Mm , vt sit $Gg : Mm = Vv : Vu$, vnde oritur $Mm = \frac{dx \sqrt{u}}{\sqrt{v}}$. Puncti C vero celeritas in directione CV ex vtroque motu resultans erit $= Vv - Vu$.

§. 36. Dum igitur corpus progreditur per spatium $Gg = dx$, punctum C super plano OV feretur per spatium $Cc = \frac{(Vv - Vu) dx}{\sqrt{v}}$ intereaque tantum spatium Cc motu suo radet. Quodsi autem motus rotatorius abesset, tum punctum C raderet eodem tempusculo spatium dx hocque casu foret frictio, quam corpus sentiret $= F$, illa ipsa scilicet, quam experimenta monstrant. Quoniam igitur frictio oritur ab asperitate, quam corpus dato tempusculo radendo superare debet, manifestum est praesente casu, quo punctum C tantum per spatium $Cc = \frac{(Vv - Vu) dx}{\sqrt{v}}$ planum subiectum OV radit, dum corpus ipsum per spatium dx progreditur, frictionem tanto minorem fore debere quam F , quanto spatium Cc minus est spatio dx erit ergo frictio, qua corpus retrahitur in directione CO non amplius F sed tantum $= \frac{(Vv - Vu) F}{\sqrt{v}}$. Ex quo perspicuum est, quod iam ante inuimus, si motus rotatorius Vu aequalis sit motui progressiuo Vv , tum frictionem penitus cessare: atque si fuerit $Vu > Vv$, tum frictio etiam fiet negatiua, atque corpus in directione CV sollicitabit: ita vt haec expressio perpetuo effectum frictionis exhibeat, dummodo corpus non quiescat; quippe quo casu frictio semper est nulla.

§. 37. Cum igitur corpus a frictione in directione CO retrahatur vi $= \frac{(\sqrt{v} - \sqrt{u}) F}{\sqrt{v}}$, ab hac vi motus progressivus retardabitur unde fiet $d v = - \frac{(\sqrt{v} - \sqrt{u}) F d x}{P \sqrt{v}}$. Quod vero ad motum rotatorium attinet, is a frictione accelerabitur, eritque eius vis acceleratrix $= \frac{(\sqrt{v} - \sqrt{u}) F c c}{P b b \sqrt{v}}$ denotante $P b b$ momentum inertiae corporis respectu axis, et posito $G C = c$. Reactio autem plani hoc casu ad motum rotatorium alterandum nihil confert, cum eius directio CG per ipsum centrum gravitatis G transeat. Quare dum punctum M per elementum $M m = \frac{d x \sqrt{u}}{\sqrt{v}}$ rotatur, eius motus rotatorius accelerabitur, fietque $d u = \frac{(\sqrt{v} - \sqrt{u}) F c c d x \sqrt{u}}{P b b \sqrt{v}}$. Ex quibus duabus aequationibus corporis motus tum progressivus quam rotatorius in quovis spatii OV loco poterit determinari. Primum autem perspicitur, si semel fuerit $\sqrt{u} = \sqrt{v}$, tum utrumque corporis motum perpetuo invariaturum permanere; quare si initio fuerit $\sqrt{b} = \sqrt{a}$, tum corpus motu impresso sine vlla variatione in infinitum progredietur, neque in motu suo vllum decrementum patietur, nisi quatenus a resistentia aeris ac villositate plani retardatur; a quibus impedimentis adhuc mentem abstrahimus.

§. 38. Vt iam ex duabus inuentis aequationibus quicquam concludamus, ante omnia unam ex tribus variabilibus v, u et x eliminari oportet, facillime autem elementum $d x$ eliminatur. Fit autem ex prima aequatione $\frac{(\sqrt{v} - \sqrt{u}) F d x}{P \sqrt{v}} = - d v$, ex altera autem $\frac{(\sqrt{v} - \sqrt{u}) F c c d x \sqrt{u}}{P b b \sqrt{v}} = \frac{b b d v \sqrt{v}}{c c \sqrt{u}}$; unde colligimus $\frac{d v}{\sqrt{v}} + \frac{b b d u}{c c \sqrt{u}} = 0$, quae aequatio integrata dat $c c \sqrt{v} + b b \sqrt{u} = c c \sqrt{a} + b b \sqrt{b}$ constante ad initium motus accommodata. Hinc erit $\sqrt{u} =$

$\frac{c c \sqrt{a} + b b \sqrt{b} - c c \sqrt{v}}{b b}$

$$\frac{cc\sqrt{a} + bb\sqrt{b} - cc\sqrt{v}}{bb} \text{ et } \frac{\sqrt{u} - \sqrt{v}}{\sqrt{v}} = \frac{cc\sqrt{a} + bb\sqrt{b} - cc\sqrt{v} - bb\sqrt{v}}{bb\sqrt{v}}$$

Cum autem ex prima aequatione fit $\frac{Fdx}{P} = \frac{dv\sqrt{v}}{\sqrt{u} - \sqrt{v}}$ fiet $\frac{Fdx}{P} = \frac{bb\,dv\sqrt{v}}{cc\sqrt{a} + bb\sqrt{b} - cc\sqrt{v} - bb\sqrt{v}}$. Ponatur $\sqrt{v} = t$, et $cc\sqrt{a} + bb\sqrt{b} = m$ atque $cc + bb = n$, fiet $\frac{Fdx}{P} = \frac{\frac{2bb\,t\,dt}{m - nt}}{\frac{m - nt}{n}} = \frac{2bb\,t\,dt}{n}$ cuius integrale est $\frac{F x}{P} = C - \frac{bb\,t^2}{n} - \frac{2m\,bb\,t}{n^2} - \frac{2m\,m\,bb}{n^3} \log(m - nt)$ restitutis ergo valoribus pro m, n , et t , et constante C

$$\text{ad casum accommodata erit } \frac{F x}{P} = \frac{cc\,bb\,a + b^4\,a + 2b^4\sqrt{a}\,b}{(cc + bb)^2} - \frac{bb\,v}{cc + bb} - \frac{2(cc\sqrt{a} + bb\sqrt{b})bb\sqrt{v}}{(cc + bb)^2} - \frac{2(cc\sqrt{a} + bb\sqrt{b})^2\,bb}{(cc + bb)^3} \log \frac{cc\sqrt{a} + bb\sqrt{b} - cc\sqrt{v} - bb\sqrt{v}}{bb\sqrt{b} - bb\sqrt{v}}$$

§. 39. Primum autem omnium intelligitur, si in loco quocunque cognitus fuerit corporis motus progressivus seu celeritas \sqrt{v} , tum expedite assignari posse motum rotatorium seu celeritatem \sqrt{u} atque vicissim simili modo ex cognito motu rotatorio indicabitur motus progressivus. Ex aequatione enim $cc\sqrt{v} + bb\sqrt{u} = cc\sqrt{a} + bb\sqrt{b}$, si cognita fuerit celeritas progressiva \sqrt{v} , tum erit celeritas rotatoria $\sqrt{u} = \frac{cc\sqrt{a} + bb\sqrt{b} - cc\sqrt{v}}{bb}$, et si cognita fuerit celeritas rotatoria \sqrt{u} , erit celeritas progressiva $\sqrt{v} = \frac{cc\sqrt{a} + bb\sqrt{b} - bb\sqrt{u}}{cc}$. Quodsi ergo eueniat, ut motus progressivus cesset, tum erit celeritas rotatoria $\sqrt{u} = \frac{cc\sqrt{b} + bb\sqrt{b}}{bb}$; et si celeritas rotatoria alicubi evanescat, tum motus progressivus supererit celeritate $\sqrt{v} = \frac{cc\sqrt{a} + bb\sqrt{b}}{cc}$. Generatim autem perspicitur frictione non obstante, semper in motu corporis quantitatem quandam eiusdem magnitudinis constanter conservari, quae est $cc\sqrt{v} + bb\sqrt{u}$; ex quo intelligitur corpus nunquam ad quietem a frictione redigi posse, nisi sit $cc\sqrt{a} + bb\sqrt{b} = 0$.

§. 40. Quo autem facilius singula phaenomena, quae
 aequationes inuentae in se complectuntur, euoluamus,
 casus particulares perpendamus. Ponamus igitur corpori
 initio in O motum tantum progressuum celeritate \sqrt{a}
 esse impressum, ita ut sit $\sqrt{b} = 0$, fiet ergo ubique
 $cc\sqrt{v} + bb\sqrt{u} = cc\sqrt{a}$; quae est una aequatio; al-
 tera vero erit $\frac{Fx}{P} = \frac{(cc + bb)bb\sqrt{a}}{(cc + bb)^2} - \frac{bbv}{cc + bb} - \frac{2ccbb\sqrt{av}}{(cc + bb)^2}$
 $- \frac{2c^4bb\sqrt{a}}{(cc + bb)^3} \int \frac{(cc + bb)\sqrt{v} - cc\sqrt{a}}{bb\sqrt{a}}$. Quoniam igitur logarithmi
 quantitatum negatiuarum sunt imaginarii, apparet semper
 fore $\sqrt{v} > \frac{cc\sqrt{a}}{cc + bb}$, neque ante, quam corpus emensum
 sit spatium infinitum fiet $\sqrt{v} = \frac{cc\sqrt{a}}{cc + bb}$; tum vero fiet
 $\sqrt{u} = \sqrt{v}$, corpusque motu aequabili feretur. Celeritas
 ergo progressua \sqrt{a} corporis continuo diminuitur, donec
 tandem spatio percurso infinito sui partem $\frac{bb\sqrt{a}}{cc + bb}$ amittat.
 Cylindrus igitur, in quo est $bb = \frac{1}{2}cc$, spatio absoluto
 infinito, retinebit celeritatem $= \frac{2}{3}\sqrt{a}$. Globus vero vel sphae-
 roides ellipticum in quo est $bb = \frac{2}{3}cc$, de motu suo pro-
 gressiuo primum impresso \sqrt{a} continuo amittet, donec post
 tempus infinitum retineat motum progressuum celeritate
 $= \frac{5}{7}\sqrt{a}$, simulque tantum motum rotatorium adipiscatur.

§. 41. Ponamus iam corpori initio in O nullum
 motum progressuum sed tantummodo motum rotatorium
 in plagam DHC cum celeritate \sqrt{b} esse impressum, ita
 ut sit $\sqrt{a} = 0$. Generabitur igitur mox motus progressi-
 uus, ac semper inter motum progressuum et rotatorium
 haec intercedet ratio ut sit $cc\sqrt{v} + bb\sqrt{u} = bb\sqrt{b}$. Praeterea
 vero erit $\frac{Fx}{P} = \frac{bbv}{cc + bb} - \frac{2b^4\sqrt{bv}}{(cc + bb)^2} - \frac{2b^6b}{(cc + bb)^3} \int \frac{bb\sqrt{v} - (cc + bb)\sqrt{v}}{bb\sqrt{b}}$
 ex qua aequatione apparet, si spatium x ponatur infini-
 nitum, esse oportere $\sqrt{v} = \frac{bb\sqrt{b}}{cc + bb}$, quo casu quoque fit

$Vu = \frac{bb\sqrt{b}}{cc+bb}$. Motus ergo progressiuus continuo crescit rotatorius vero decrescit, donec spatio emenso infinito inter se fiant aequales. Ad sensum autem ista aequalitas mox obtinetur, si enim ponamus $Vv = \frac{99bb\sqrt{b}}{100(cc+bb)}$ fiet $\frac{Fx}{P} = 6, 1501. \frac{bb}{(cc+bb)^2}$: et si $bb = \frac{2}{3}cc$ uti in globo erit $\frac{Fx}{P} = 0, 1434b$. Statim igitur ab initio motus tum prope ad vniuniformitatem redigitur, ut ne centesima quidem parte a perfecta vniuniformitate discrepet. Si enim $\frac{Fx}{P}$ fit $= \frac{1}{4}$, quae est frictio iam satis parua, tum antequam corpus spatium $x = b$ absoluit, celeritatem habebit ne centesima quidem parte a celeritate vniuniformi et vltima discrepantem.

§. 42. Si igitur corpori initio in O duplex motus nempe progressiuus celeritate Va ac rotatorius celeritate Vb imprimatur, facile indicare poterimus, quomodo corpus in infinitum sit processurum, scilicet si fuerit $Va = Vb$, tum corpus motu utroque vniuniformiter in infinitum progredietur. Sin autem fit $Va > Vb$, tum corporis motus progressiuus diminuetur, rotatorius vero augetur, donec emenso spatio infinito ambo inter se fiant aequales, eritque tum $Vv = Vu = \frac{cc\sqrt{a} + bb\sqrt{b}}{cc+bb}$. At si fuerit $Va < Vb$ tum celeritas motus progressiui crescet, rotatorius motus vero diminuetur, donec percurso spatio infinito vtriusque celeritas fit $= \frac{cc\sqrt{a} + bb\sqrt{b}}{cc+bb}$. Ad hanc vero motus aequabilitatem corpus satis cito ita perueniet, ut sensibus discrimen percipere non valeamus. Cum enim spatium x fiat infinitum, si quantitas logarithmica

$\frac{cc\sqrt{a} + bb\sqrt{b} - cc\sqrt{v} - bb\sqrt{v}}{bb\sqrt{b} - bb\sqrt{a}}$ evanescat, quia $10 = -\infty$, ita cum

cum logarithmus minimae fractionis fit satis exiguus, intelligitur modicum spatium requiri, ad hoc, vt discrimen a motu perfecte vniformi prorsus fit insensibile.

§. 43. Ponamus autem nunc corpori initio in O praeter motum progressiuum celeritate \sqrt{a} imprimi motum rotatorium cum celeritate \sqrt{b} in plagam oppositam HDC; atque in computo praecedente loco $+\sqrt{b}$ scribere debemus $-\sqrt{b}$. Ac si in C ponamus motum rotatorium adhuc in eandem plagam HDC fieri, quoque \sqrt{u} negative capiendum est. Pro hoc igitur casu habetur prima aequatio haec: $cc\sqrt{v} - bb\sqrt{u} = cc\sqrt{a} - bb\sqrt{b}$: altera vero erit

$$\frac{Fx - 2cc\sqrt{a} + b^2a - 2b^2\sqrt{ab}}{P} = \frac{2(cc\sqrt{a} - bb\sqrt{b})bb\sqrt{v}}{2(cc\sqrt{a} - bb\sqrt{b})^2bb} - \frac{bb\sqrt{v} - cc\sqrt{a} + (cc + bb)\sqrt{v}}{bb\sqrt{a} + bb\sqrt{b}}$$

Ex hoc apparet statum vniformitatis, ad quem motus corporis se tandem componet fore $\sqrt{v} = \frac{cc\sqrt{a} - bb\sqrt{b}}{cc + bb}$ et $\sqrt{u} = -\frac{cc\sqrt{a} + bb\sqrt{b}}{cc + bb}$ nempe $\sqrt{v} = -\sqrt{u}$, vti status vniformitatis, quo frictio euanescit, requirit. Antequam igitur corpus ad istum statum vniformitatis peruenire potest, alterutram celeritatem negatiuum fieri oportet, ideoque per statum quietis transire.

§. 44. Ad casus hos euoluendos, quibus alterutra celeritas euanescit, ponamus primo $cc\sqrt{a} > bb\sqrt{b}$; manebit igitur celeritas progressiua \sqrt{v} perpetuo affirmatiua, attamen continuo diminuetur, donec post percursum spatium infinitum fiat $\sqrt{v} = \frac{cc\sqrt{a} - bb\sqrt{b}}{cc + bb}$, tum vero erit $\sqrt{u} = -\frac{cc\sqrt{a} + bb\sqrt{b}}{cc + bb}$; ideoque rotatorius fit in sensum contrarium ei, quo initio rotabatur. Alicubi igitur necesse est vt motus rotatorius euanescat, vbi scilicet rotatio in plagam contrariam incipit. Ad hunc locum inueniendum ponamus $\sqrt{u} = 0$, eritque $\sqrt{v} = \frac{cc\sqrt{a} - bb\sqrt{b}}{cc}$, qui valor in

altera aequatione substitutus. dabit $\frac{Fx}{P} = \frac{2b^4(cc+bb)\sqrt{ab}}{cc(cc+bb)^2} - \frac{bb(cc+bb)b}{c^4(cc+bb)^2} - \frac{2(cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b})^2 bb}{(cc+bb)^3} / \frac{cc\sqrt{a}-bb\sqrt{b}}{cc\sqrt{a}+cc\sqrt{b}}$: valor ergo ipsius x ex hac aequatione ortus ostendet locum ubi motus rotatorius corpori initio impressus prorsus definit, atque ubi motus rotatorius in plagam oppositam generari incipit, tum igitur corpus in infinitum progredietur, tandemque motum uniformem recipiet. At ex praecedentibus intelligitur non multo post, quum \sqrt{u} erat $= 0$, motum ad sensum fore uniformem.

§. 45. Casus maxime notatu dignus est, quo $bb\sqrt{b} > cc\sqrt{a}$, tum enim, antequam corpus ad statum aequabilitatis peruenire potest, eius motus progressivus evanescere, et in negativum transmutari debet. Progreditur scilicet corpus in directione OC ad certum usque terminum V, ex quo subito reuertetur in viam VO, atque in hac directione VO v in infinitum abibit; consequeturque celeritatem negativam $\sqrt{v} = \frac{cc\sqrt{a}-bb\sqrt{b}}{cc+bb}$, celeritas autem rotatoria spatio percurso infinito erit $\sqrt{u} = \frac{bb\sqrt{b}-cc\sqrt{a}}{cc+bb}$. Ad terminum ergo V determinandum, quousque corpus pertingit, antequam reuertitur, ponere debemus $\sqrt{v} = 0$, fietque in eo loco celeritas rotatoria $\sqrt{u} = \frac{bb\sqrt{b}-cc\sqrt{a}}{bb}$, atque $\frac{Fx}{P} = \frac{[3cc+bb]bba-2b^4\sqrt{ab}}{(cc+bb)^2} - \frac{2(cc\sqrt{a}-bb\sqrt{b})^2 bb}{(cc+bb)^3} / \frac{bb\sqrt{b}-cc\sqrt{a}}{bb\sqrt{a}+bb\sqrt{b}}$. Si fiat $bb\sqrt{b} = cc\sqrt{a}$, qui casus constituit terminum huius phaenomeni paradoxii, quo corpus super plano libero ad certum usque locum progreditur, indeque subito regreditur: corpus usque ad V, existente $OV = \frac{pbba}{p(cc+bb)}$ progreditur, antequam celeritatem suam omnino perdit, tum vero simul motum rotatorium amittet, atque in quiete persistet, qui est casus singularis.

§. 46.

§. 46. Sit igitur $bb\sqrt{b} > cc\sqrt{a}$, ac ponatur $\frac{bb\sqrt{b} - cc\sqrt{a}}{bb\sqrt{b} + bb\sqrt{b}} = \frac{1}{n}$, erit $\sqrt{b} = \frac{(ncc + bb)\sqrt{a}}{(n-1)bb}$ hincque $\frac{F\infty}{P} = \frac{(n-1)bba}{(n-1)(cc+bb)} - \frac{2bba}{(n-1)^2(cc+bb)} \int \frac{1}{n} \text{sen } x = OV = \frac{(n-1)Pbba}{(n-1)(cc+bb)F} + \frac{2Pbba}{(n-1)^2(cc+bb)F} \ln n$. Sicque punctum V innotescit, quo-
vsque corpus motu suo pertingit, antequam reuertitur. Praecipui igitur casus ita se habebunt, ex quibus reli-
quos concludere licet

$$\begin{aligned} n=2; \quad \sqrt{b} &= \frac{(2cc+bb)\sqrt{a}}{bb}; \quad OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)} \cdot 0,38629436 \\ n=3; \quad \sqrt{b} &= \frac{(3cc+bb)\sqrt{a}}{2bb}; \quad OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)} \cdot 0,54930614 \\ n=4; \quad \sqrt{b} &= \frac{(4cc+bb)\sqrt{a}}{3bb}; \quad OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)} \cdot 0,64139874 \\ n=5; \quad \sqrt{b} &= \frac{(5cc+bb)\sqrt{a}}{4bb}; \quad OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)} \cdot 0,70117974 \\ n=6; \quad \sqrt{b} &= \frac{(6cc+bb)\sqrt{a}}{5bb}; \quad OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)} \cdot 0,74334075 \\ n=7; \quad \sqrt{b} &= \frac{(7cc+bb)\sqrt{a}}{6bb}; \quad OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)} \cdot 0,77477278 \\ n=8; \quad \sqrt{b} &= \frac{(8cc+bb)\sqrt{a}}{7bb}; \quad OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)} \cdot 0,79916087 \\ n=9; \quad \sqrt{b} &= \frac{(9cc+bb)\sqrt{a}}{8bb}; \quad OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)} \cdot 0,81866327 \\ n=10; \quad \sqrt{b} &= \frac{(10cc+bb)\sqrt{a}}{9bb}; \quad OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)} \cdot 0,83463172 \end{aligned}$$

§. 47. Phaenomenon hoc, quo corpus super plano horizontali propulsum ad certam tantum distantiam pro-
greditur indeque subito quasi reflexum reuertitur, experi-
mentis quoque demonstrari potest, dum corpori rotundo
duplex motus progressiuus ac rotatorius hac lege impri-
mitur, vt motus rotatorius sit contrarius motui progressiuo
ac celeritas rotatorii motus \sqrt{b} maior sit quam $\frac{cc}{bb}\sqrt{a}$. Si
nimirum globus ad huiusmodi experimenta adhibetur,
ipsique in O imprimatur tum motus progressiuus in di-
rectione OV celeritate $= \sqrt{a}$, simul vero ipsi inducatur
motus rotatorius in plagam $\delta O \Phi$ celeritate $= \sqrt{b}$, tum

ob $\frac{c}{b} = \frac{c}{b}$ si fuerit $\sqrt{b} > \frac{1}{2}\sqrt{a}$, globus motu progressiuo ad certam tantum distantiam OV pertinet, hincque reuertetur, et in directione \sqrt{v} in infinitum progredietur, celeritatem tandem acquires pro utroque motu eandem atque $= \frac{2\sqrt{b} - 5\sqrt{a}}{7}$. Quodsi autem ponamus $\sqrt{b} = \frac{(5n+2)\sqrt{a}}{2(n-1)}$, erit interuallum OV, ad quod corpus pertinet, antequam reflectitur $= \frac{2Pa}{7F} \left(\frac{n-3}{n-1} + \frac{2ln}{(n-1)^2} \right)$, vbi pro ln logarithmum hyperbolicum numeri n accipi oportet.

§. 48. Quo facilius hae conclusiones cum experimentis comparari queant, diuersos casus numeri n , quos ante euoluimus, singulatim perpendamus, vbi notandum est fore proxime $\frac{2P}{7F} = 1$: quia vulgo $\frac{P}{F}$ solet esse fractio inter $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ contenta. Si porro k denotet spatium, quod globus motu impresso tempore vnius minuti secundi absolueret, in partibus millesimis pedis Renani expressum, erit $a = \frac{55}{82360}$. Sicque spatium OV quouis casu in data mensura exprimi poterit. Si ergo fuerit

$$\sqrt{b} = \frac{12}{5}\sqrt{a}; \text{ erit } OV = \frac{2Pa}{7F}. 0, 38629436$$

$$\sqrt{b} = \frac{17}{4}\sqrt{a}; \text{ erit } OV = \frac{2Pa}{7F}. 9, 54930614$$

$$\sqrt{b} = \frac{22}{3}\sqrt{a}; \text{ erit } OV = \frac{2Pa}{7F}. 0, 64139874$$

$$\sqrt{b} = \frac{27}{2}\sqrt{a}; \text{ erit } OV = \frac{2Pa}{7F}. 0, 70117974$$

$$\sqrt{b} = \frac{32}{13}\sqrt{a}; \text{ erit } OV = \frac{2Pa}{7F}. 0, 74334075$$

etc.

Atque si numerus n fiat infinitus vt fiat

$\sqrt{b} = \frac{5}{2}\sqrt{a}$ erit $OV = \frac{2Pa}{7F}$ quod est interuallum maximum ad quod globus pertingere valet, antequam reuertatur.

DE

